Kummer 拡大体と自己同型写像群

Kummer Extention Field and the Group of Automorphism

新潟歯学部　桜　岡　　充

Mitsuru SAKURAOKA
The Nippon Dental University, Hamaura-cho 1—8,
Niigata 951-8580, JAPAN

（2001 年 11 月 26 日　受理）

Abstract

We consider the case of a field K has the following properties:

1）K contains the r-th primitive roots of 1,

2）The automorphic group of G of the normal extention field E of K is an Abelian group of rank r.

It will be shown that E is obtained by adjoining to K the r-th roots of the finite number of the elements of K:

$$E=K\,(a_1{}^{1/r},\ a_2{}^{1/r},\ \cdots,\ a_l{}^{1/r})$$

Conversely, if the field K has the r-th primitive roots of 1, K $(a_1{}^{1/r},\ a_2{}^{1/r},\ \cdots,\ a_l{}^{1/r})$ is an normal extention field of K, and has the automorphic group of rank r.

§1　はじめに

最初に，体Ｅの自己同型写像群Ｇの不変体Ｋにおける指標に関しての考察をしておこう。Ｇの各要素の σ にＥの要素 $x_\sigma(\neq 0)$ を対応させるとき，Ｇの任意要素 σ，τ に対して

Noether の等式

$$x_\sigma \cdot \sigma(x_\tau) = x_{\sigma\tau} \tag{1}$$

が成立する。いま，E の 0 でないある要素 α に対して，E 内の 0 でない要素 x_σ，x_τ，$x_{\sigma\tau}$ を

$$x_\sigma = \alpha/\sigma(\alpha),\quad x_\tau = \alpha/\tau(\alpha),\quad x_{\sigma\tau} = \alpha/\sigma\tau(\alpha)$$

で対応ずけるとき，(1)の左辺は

$$x_\sigma \cdot \sigma(x_\tau) = \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)} \cdot \sigma\left(\frac{\alpha}{\tau(\alpha)}\right) = \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)} \cdot \frac{\sigma(\alpha)}{\sigma\tau(\alpha)} = \frac{\alpha}{\sigma\tau(\alpha)}$$

となり　これは(1)の右辺そのものである。逆に，E の要素 x_σ が(1)を満たすものであるとすると，自己同型写像群 G の各要素は線形独立であるから E のすべての要素 z に対して

$$\sum_\tau c_\tau \cdot \tau(z) = 0 \quad \text{(和は G の要素全体にわたる総和である)}$$

であるなら $c_\tau(\tau \in \mathrm{G}) = 0$ を与えてしまう。よって　すべての z に対しては $\sum_\tau x_\tau \cdot \tau(z) \neq 0$ である。すなわち $\sum x_\tau \tau(a) = \alpha \neq 0$ となるような E 内の要素 a が必ず存在する。これは $\{x_\tau\}$ として 0 要素をもたない G の不変体K の要素のみをとったときにも言えることである。α に σ を作用させて $\sigma(\alpha) = \sum_\tau \sigma(x_\tau)\,\sigma\tau(a)$，これに x_σ を掛けると $x_\sigma\sigma(\alpha) = \sum x_\sigma\sigma(x_\tau)\ \sigma\tau(a)$ となるが $x_\sigma\sigma(x_\tau) = x_{\sigma\tau}$ であって τ が G の要素全体を動くことを考えると

$$x_\sigma\sigma(\alpha) = \sum_\tau x_{\sigma\tau}\sigma\tau(a) = \sum_\lambda x_\lambda \cdot \lambda(a) = \alpha$$

が得られる。つまり(1)を成立させる x_σ は

$$x_\sigma = \alpha/\sigma(\alpha) \tag{2}$$

と表されることが分かる。この意味で(2)を Noether 等式(1)の解ともよぶ。ここで　このような α は多数存在し得る訳であるが，α として x_σ が G の不変体K に入るように選ぶこともできる。しかして Noether 等式の解のうち K 内にあるものだけをとり出すと，σ は K の要素を動かさないので Noether 等式は

$$x_{\sigma\tau} = x_\sigma \cdot x_\tau$$

をあたえる。x_σ を G の K 内への写像 $\mathrm{C}(\sigma) = x_\sigma$ とみなすと

$$\mathrm{C}(\sigma\tau) = \alpha/\sigma\tau(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)} \cdot \sigma(\alpha) \cdot \sigma\tau(\alpha^{-1})$$

$$= \mathrm{C}(\sigma) \cdot \sigma[\alpha\tau(\alpha^{-1})] = \mathrm{C}(\sigma) \cdot \frac{\alpha}{\tau(\alpha)} = \mathrm{C}(\sigma)\,\mathrm{C}(\tau)$$

よって C は準同型写像であって x_σ は G の K における指標とみることができる量なのである：

$$\mathrm{C}(\sigma)=x_\sigma=\alpha/\sigma(\alpha)$$

つぎにGの任意の要素 τ に対してGの要素の位数の最小公倍数を n とすると

$$\alpha^n/\tau(\alpha^n)=\{\alpha/\tau(\alpha)\}^n=\mathrm{C}(\sigma^n)=\mathrm{C}(1)=1$$

なので α^n はKの要素である。以上より"Eを群GをもつKの正規拡大体とする。GのKに対する任意の指標 $\mathrm{C}(\sigma)$ について

$$\mathrm{C}(\sigma)=\frac{\alpha}{\sigma(\alpha)} \tag{3}$$

となるような0でないEの要素 α は常に存在する。逆に，0でないEの要素 α が任意のGの要素 σ に対して $\mathrm{C}(\sigma)=\alpha/\sigma(\alpha)$ がK内にあるようなものであるなら $\mathrm{C}(\sigma)$ はGのKにおける指標を定義する。また　このときの要素の位数の最小公倍数を n とすると α^n はK内にある。" 以上の結果を用いて次節ではKummer拡大体の構造の明瞭な表現形式を見出す。

§2　自己同型写像群の不変体と Kummer 拡大

Kが1の原子 r 乗根を含む体であるとし，その群Gは有限可換乗法群でGの各要素の位数が r の約数である階数 r のAbel群であるとする。任意のKにおけるGの指標Cに対して $[\mathrm{C}(\sigma)]^r=\mathrm{C}(\sigma^r)=1$ であるから，指標は1の r 乗根である。2つの指標 C_1，C_2 に対して $\mathrm{C}_1(\sigma)\cdot\mathrm{C}_2(\sigma)$ も指標であるのでこれを $\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2(\sigma)$ で表す。$[\mathrm{C}_1(\sigma)]^{-1}$ も1つの指標であって $\forall\sigma$，$\forall\tau\in\mathrm{G}$ に対して

$$\mathrm{C}_1(\sigma)\mathrm{C}_1(\tau)=\mathrm{C}_1(\sigma\tau),\ \mathrm{C}_2(\sigma)\mathrm{C}_2(\tau)=\mathrm{C}_2(\sigma\tau)$$

$$\therefore \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2(\sigma)\cdot\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2(\tau)=\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2(\sigma\tau)$$

$[\mathrm{C}_1(\sigma)]^{-1}=\mathrm{C}_1(\sigma^{-1})$ であるので

$$\begin{aligned}[\mathrm{C}_1(\sigma)]^{-1}\cdot[\mathrm{C}_1(\tau)]^{-1}&=\mathrm{C}_1(\sigma^{-1})\mathrm{C}_1(\tau^{-1})=\mathrm{C}_1[(\tau\sigma)^{-1}]\\&=\mathrm{C}_1[(\sigma\tau)^{-1}]=[\mathrm{C}_1(\sigma\tau)]^{-1}\end{aligned}$$

が成立し，指標は上記の結合のもとで準同型写像群 $\dot{\mathrm{G}}$（群Gの指標群または双対群）をなす。*) 有限Abel群Gに対しては基底定理より k 個の生成要素 τ_1，τ_2，…，τ_k が存在して，任意の要素 σ は

$$\sigma=\tau_1^{p1}\cdot\tau_2^{p2}\cdot\cdots\cdot\tau_k^{pk} \tag{4}$$

の形に表現される。そして τ_1，τ_2，…，τ_k の位数をそれぞれ m_1，m_2，…，m_k とするとこ

*）$\dot{\mathrm{G}}$ の単位要素は恒等指標 $\mathrm{C}_1(\sigma)=1$ であり $\mathrm{C}_1^{-1}\cdot\mathrm{C}_1=\mathrm{C}_1\cdot\mathrm{C}_1^{-1}=\mathrm{C}_1$ は容易にわかる。

れらの最小公倍数が階数 r であり p_j は m_j を法として一意的に定まる。指標Cに対して $\varepsilon_j=C(\tau_j)$ とおくと，τ_j の位数が m_j であるから $\varepsilon_j{}^{mj}=[C(\tau_j)]^{mj}=C[\tau_j{}^{mj}]=C(1)=1$ であって

$$C(\sigma)=\varepsilon_1{}^{p1}\cdot\varepsilon_2{}^{p2}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_k{}^{pk} \tag{5}$$

となる。逆に ε_j を1の m_j 乗根とすると1つの指標C(G→K内への写像）は ε_p として，1も含めて m_p 個ある1の m_p 乗根のいずれかを指定することで定まってくる。故に任意の指標Cは（ε_1，ε_2，…，ε_k）の組によって，つまり1つのベクトルによって書き表され，2個の指標の積には対応する成分同志の積を成分とするベクトルが対応する。もちろん，指標群としての単位要素は（1，1，…，1）である。

さて ε_t を1の原始 m_t 乗根にとり，他の ε_j を1にとったときの指標を C_t と書こう。すると任意の指標Cは，$C=C_1{}^{l1}C_2{}^{l2}\cdots C_k{}^{lk}$ の形で与えられる。ここに l_j は m_j を法として一意的に定まる。これはとりもなおさず，Gが $\dot{G}$ と同型であることを示し，$\dot{G}$ の位数がGの位数に一致する。Gの要素 $\sigma(\neq 1)$ を(4)の形にかくとき，指数のうちの少なくとも1つは m_j で割り切れない。指標 C_j のなかに（1，…，ε_j，…，1）等のように $C_j(\sigma)\neq 1$ であるものが存在する。つまり $\sigma(\neq 1)$ なる任意の要素に対して $C(\sigma)\neq 1$ である指標Cをみつけることは常に可能である。σ をGの要素とする。いろいろな指標Cに対する写像をかんがえる。指標 $C=(\varepsilon_1{}^{l1}, \varepsilon_2{}^{l2}, \cdots, \varepsilon_k{}^{lk})$ による $\sigma=\tau_1{}^{p1}\cdot\tau_2{}^{p2}\cdot\cdots\cdot\tau_k{}^{pk}$ のK内にできる像は $C(\sigma)=\varepsilon_1{}^{l1p1}\cdot\varepsilon_2{}^{l2p2}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_k{}^{lkpk}$ である。σ を固定したときの指標の積 C_1C_2 は $C_1C_2(\sigma)=C_1(\sigma)\cdot C_2(\sigma)$ によって準同型写像であり，この $(C_1, C_2, \cdots, C_M)\to(C_1(\sigma), C_2(\sigma), \cdots, C_M(\sigma))$ ［MはGの位数］という写像は $\dot{G}$ の指標の1つである。よって，Gの各要素 σ に対して $\dot{G}$ の指標の1つ1つ［上記の写像をAで表せば $A\sigma(C)$ でCが $\dot{G}$ の全要素をとる時の集合で，σ で代表される $\{C\}\to$ K内の写像］が対応する。$\dot{G}$ のこのような2つの指標 $C(\sigma)$ と $C(\tau)$ の積は $A_\sigma(C)\cdot A_\tau(C)=C(\sigma)\cdot C(\tau)=C(\sigma\tau)=A_{\sigma\tau}(C)$ であり，これは $\sigma\cdot\tau$ に対応する指標である。$\sigma\neq\tau$ であるとき $C(\sigma)=C(\tau)$ とすると $C(\sigma\tau^{-1})=1$ であるということになるが，いま $\sigma\cdot\tau^{-1}\neq 1$ であって $\sigma\neq 1$ では $C(\sigma)\neq 1$ なる指標が存在することに反する。$\sigma\neq\tau$ であるならGの指標 $\{C(\sigma)\}\neq\dot{G}$ の指標 $\{C(\tau)\}$ である。よってGの指標群位数≧Gの位数である。然るにGの指標群は，各要素がGの要素 σ，τ，…でラベルされるのだから $\dot{G}$ と同じ位数をもち，したがってGと同位数である。ゆえに σ が群G内を動くとき $(C_1, C_2, \cdots, C_M)\to(C_1(\sigma), C_2(\sigma), \cdots, C_M(\sigma))$ ［MはGの位数］という写像は $\dot{G}$ の指標全体を動く。以上よりGを $\dot{G}$ の指標群とみなすことができる。

つぎに，Kは1の原始 r 乗根をふくむ体，EがKの正規拡大体でその自己同型写像群が

階数 r の Abel 群の場合を考察する。このとき E は K に K の有限個の要素の r 乗根を付加することのよってえられることを示す。まず K の要素の r 乗根であるような E の要素 $\alpha(\neq 0)$ の集合，つまり α^r が K 内にあるような E の要素 $\alpha(\neq 0)$ 全体の集合 A をみる。集合 A は乗法群であり，K の 0 でない要素全体の集合 K'を部分群に持つ。また商群 A/K' は G の指標群 G と同形，よって群 G 自身とも同形であることが示される：C を G の指標とする。G の任意の要素 σ に体して $C(\sigma)=\alpha/\sigma(\alpha)$ であるような E の要素 $\alpha(\neq 0)$ は常に存在し，α^r は K に含まれる[参考文献 1)]。つまり α は A に属する。任意の σ に体して

$$\alpha/\sigma(\alpha)=\beta/\sigma(\beta)$$

ならば［α，$\beta(\in \mathrm{E})$ が同じ指標 C を与えるとき］

$$\alpha/\beta=\sigma(\alpha/\beta)$$

であるので，α/β は K'に含まれる。$\therefore \beta\in\alpha\mathrm{K}'$。逆に，$\beta\in\alpha\mathrm{K}' \therefore \alpha/\beta\in\mathrm{K}'$ならば $\sigma(\alpha/\beta)=\sigma(\alpha)/\sigma(\beta)=\alpha/\beta \quad \therefore \alpha/\sigma(\alpha)=\beta/\sigma(\beta)$ より α，β は K における同一の指標を与える A(⊂E)の要素である。つまり各々の指標 C には 1 つの剰余類 $\alpha\mathrm{K}'$ が対応する。α を A の要素とすると $\alpha^r=a$ は K の要素であるから，$[\sigma(\alpha)]^r=a=\alpha^r \therefore [\alpha/\sigma(\alpha)]^r=1$ となり $\alpha/\sigma(\alpha)$ は 1 の r 乗根であり K'の要素である。よって $\alpha/\sigma(\alpha)$ は G の 1 つの指標である。こうして上記の対応は，G から商群 A/K'の上への 1 対 1 の写像［S で表そう］である。そして，G の K における指標 C_1，C_2に対して

$$\begin{cases} S(C_1)=\{\alpha \text{ 剰余類}\} \\ \\ S(C_2)=\{\beta \text{ 剰余類}\} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} C_1(\sigma)=\alpha/\sigma(\alpha) \\ \\ C_2(\sigma)=\beta/\sigma(\beta) \end{cases}$$

ならば $C_1C_2(\sigma)=\alpha\cdot\beta/\sigma(\alpha\cdot\beta) \longleftrightarrow S(C_1\cdot C_2)=\{\alpha\cdot\beta \text{ 剰余類}\}=\{\alpha \text{ 剰余類と } \beta \text{ 剰余類の積}\}$ となりこの写像は G から A/K'上への同形写像である。よって，さらに A/K'が有限群であることもわかる。

さて E_0 を K に A の要素全体を付加して得られる中間体であって，E_0 内の G の部分群を U とする。U は E_0 の全部要素を不変に保つ G の部分群である。U はとくに A の各要素を不変に保つ。U が 1 でない要素 σ を持つとする。G には $C(\sigma)\neq 1$ である K に於る指標 C が存在する。然るに A 内の適当な α が存在して $C(\sigma)=\alpha/\sigma(\alpha)$となるので，$\sigma$ は α を動かすことになり，A が U の不変体であることに反する。つまり U＝1 であって $E_0=E$ となる。K と E の中間体 E_1にはあ G のある部分群 U が対応している。G は Abel 群であるから U は G の正規部分群であり，E_1 は K の正規拡大体である。そしてその自己同形写像群 G/U は回数 r の Abel 群である。よって上でえられた結果は E_1 にもあてはめることが

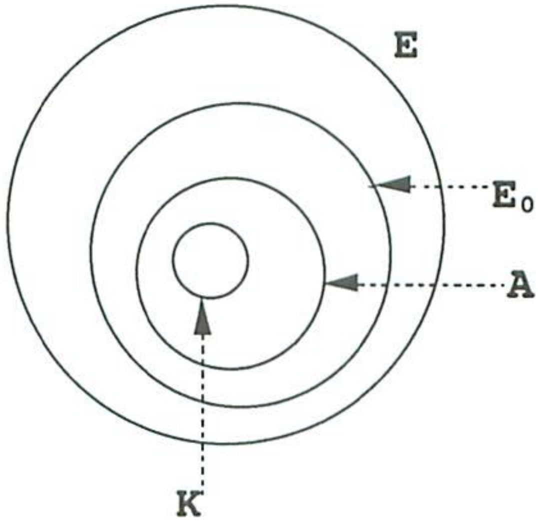

図1．Eは1の原始 r 乗根を含む体Kの正規拡大体であり，そのK上の自己同型写像群がGで，基礎体KはGの不変体。Aは r 乗がK内にある $\alpha(\in E, \neq 0)$ 全ての集合で乗法群をなす。E_0 はAをKに付加して得られる体で自己同型群がAbel群なのでKの正規拡大体である。E_0 を不変にたもつGの部分群をUと書くとき剰余類群G/UがK上 E_0 の同型群である。

できる。β^r がKに含まれるような E_1 の要素 $\beta \neq 0$ の全体をBで表すと，E_1 はKにBを付加することによって得られる。明かにBはK'を含むAの部分群である。つまり，K'とAとの間にはその間の中間体の個数＝Gの部分群の個数の中間群Bが存在する。ところで任意の中間群BはA/K'の部分群B/K'に対応し，A/K'は $\dot{G}$ ，したGに同型である。よって中間群の個数は部分群Uの個数にひとしい。したがって，K，Eの中間体 E_1 が決ればBが決るのは自明でありK'，Aの中間群GがきまればK'を法とするBの剰余類群B/K'がきまり，B/K'はG/Uと同型ゆえG/Uがきまる。つまり E_1，Uがきまるのである。よって中間体と中間群Bとの間に1対1の対応を与えることができる。とくにAと異なる中間体を付加しても，体Eは作れないのである。

Aの要素の r 乗全体の作る集合を A^r とかくと，これは r 乗根がEに含まれるようなK'の要素全体の集合である。またK'の要素の r 乗全体の作る集合を K'^r とする。商群 A^r/K'^r は剰余類 $aK'^r(a \in A^r)$ から構成され，aK'^r の任意の要素の r 乗根は $a^{1/r}$ とK'の因子だけ異なるにすぎない。ここに $a^{1/r}$ は $x^r - a = 0$ の任意のかってに決め固定した根を意味

する。また A/K' の要素は全く別の剰余類 K', αK', βK', ……であるので，αK', βK' それぞれの任意要素を αk_1，βk_2 と書くとき $(\alpha k_1)^r=(\beta k_2)^r$とすると $(\alpha k_1/\beta k_2)^r=1$ であるが K'は 1 の原始 r 乗根をもつので $\alpha k_1/\beta k_2\in$ K'。$\therefore \alpha k_1\in \beta k_2\cdot$ K'$=\beta$K'より αk_1 が βK' に含まれることになり矛盾する。よって A^r/K'^r の要素は K'^r，$\alpha^r K'^r$，$\beta^r K'^r$，……であり A/K'と A^r/K'^r は同じ位数をもつ群である。つぎに，A/K'$\to A^r/K'^r$ の写像をΣとかく：$\Sigma(\alpha K')=\alpha^r K'^r$。すると$\Sigma(\alpha K')\cdot\Sigma(\beta K')=\alpha^r K'^r\cdot\beta^r K'^r=(\alpha\cdot\beta)^r\cdot K'^r=\Sigma(\alpha\cdot\beta K')$，よって$\Sigma$は A/K' から A^r/K'^r の上への 1 対 1 準同型写像である。こうして指標群 $\dot{G}$ は，A^r の要素は K' の要素そのものであるので，基礎体 K の要素を用いて書き表すことができることが解る。

次に群 G が特に巡回群である時を問題にする。このとき A/K' は G と同型ゆえ巡回群であり，唯一の剰余類 αK' の整数乗の要素で構成されている。$\therefore$A 自体が（α の整数次）・(K' の要素)なる要素のみをもち，K に A を付加するには，唯一の要素 α を付加すればよい。即ち G が巡回群なら，E は K に K のある適切な 1 つの要素の r 乗根を付加してえられる。以上より，1 の原始根を含む体の正規拡大体の自己同型写像群が Abel 群である拡大体：Kummer 体に対して以下のことがいえる；

“E を 1 の原始 r 乗根を含む体 K の正規拡大体としての Kummer 体とし，その群が階数 r の Abel 群であるとき，α^r が K にふくまれるような E の要素 $\alpha(\neq 0)$ の集合を A とすると，$\dot{G}$ は A/K' と A^r/K'^r に同型であり，E=K(A)である。A と K' の中間体を B とかくと，K(B) は K，E の中間体であり B と K(B) の対応は 1 対 1 である。G が巡回群なら，E は K に K のある適切な 1 つの要素の r 乗根を付加して得られる。”

さて　こんどは a_1，a_2，…，a_l を K の 0 でない要素とするとき

$$E=K(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_l)：\alpha_k=a_k{}^{1/r}$$

を考察する。E は多項式 $(x^r-a_1)\cdot(x^r-a_2)\cdots\cdots(x^r-a_l)$ の分解体であるが，今度は逆にこの形の拡大体は同型群 G が階数 r の Abel 群であり K の Kummer 拡大体であることをみよう。多項式 x^r-a_j の導関数は rx^{r-1} であって K が 1 の原始 r 乗根を含むときは，r は K の指標 p で割り切れない［参考文献 2)］ので rx^{r-1}の根は 0 だけなのである。よって多項式の各々の因数 x^r-a_j は単根だけを持つことになり E は K 内分離多項式の分解体ということになり K の正規拡大体である。E の自己同型写像を σ とすると $\alpha_j{}^r=a_j$ より $[\sigma(\alpha_j)]^r=a_j$となるので，$\sigma(\alpha_j)$ は α_jに 1 の r 乗根 $\varepsilon_j(\sigma)$ が掛け合わされているもので $\sigma(\alpha_j)=\varepsilon_j(\sigma)\cdot\alpha_j$，$j=1$，2，…，$l$ であり α_j の像のみを指定すれば E のすべての要素は指定されることになり，この関係式によって σ が特徴ずけられたことになる。つまり，K

に付加する数の位相因子に還元される。σ，τ を自己同型群Gの要素とすると，$\varepsilon_j(\sigma)$ はK内にあるので

$$\tau[\sigma(\alpha_j)]=\tau[\varepsilon_j(\sigma)\cdot\alpha_j]=\varepsilon_j(\sigma)\cdot\sigma(\alpha_j)=\varepsilon_j(\sigma)\cdot\varepsilon_j(\tau)\cdot\alpha_j.$$

一方，$\tau[\sigma(\alpha_j)]=\varepsilon_j(\tau)\cdot\alpha_j$ であるので $\varepsilon_j(\tau\cdot\sigma)=\varepsilon_j(\sigma)\cdot\varepsilon_j(\tau)$。$\therefore\varepsilon_j(\tau\cdot\sigma)=\varepsilon_j(\sigma\cdot\tau)$ $\therefore\tau\sigma(\alpha_j)=\sigma\tau(\alpha_j)$ となりGはAbel群である。さらに $\varepsilon_j(\sigma^r)=[\varepsilon_j(\sigma)]^r=1$ $\therefore\sigma^r(\alpha_j)=\varepsilon_j(\sigma^r)\cdot\alpha_j=\alpha_j$ であるからGの階数は r である。とくに $l=1$ のとき $E=K(a_1{}^{1/r})$ であり $\varepsilon_1(\sigma)$ だけの場面となるので，群Gはこれら1のべき乗根の作る群に同型である。そのべき乗根のつくる群は，一般には1の r 乗根全体がつくる群の部分群であるから，位数が r の約数の巡回群となる。

再び l が任意の場合に戻ろう。$\alpha_1{}^{j1}\alpha_2{}^{j2}\cdots\alpha_1{}^{jl}\cdot a$ の形の要素全体がつくる乗法群を考えよう。ここに j_k は任意の自然数であり，a はK'の任意の要素である。この群はAの部分群であり，K'を含み，これらをKに付加するとEが得られるのであるから，Kに付加する中間群とそのときできる拡大体間の対応が1対1であることを思い出せば，この群はEの自己同型群Aに一致することが解る。さらに群 A^r は $a_1{}^{j1}\cdots a_l{}^{jl}\cdot a^r$ の形の要素全体からなる。群Gは A^r/K'^r に同型である。こうして，

"1の原始 r 乗根を含む任意の体Kとするとき，KにKの0でない要素 a_1，a_2，…，a_l の r 乗根を付加して得られる体：$E=K(a_1{}^{1/r}, a_2{}^{1/r}, \cdots, a_l{}^{1/r})$ はKummer体である。そしてその自己同型写像群の指標群Gは A^r/K'^r に同型である。ここに群 A^r は $a_1{}^{j1}a_2{}^{j2}\cdots a_l{}^{jl}\cdot a^r$ の形の要素全体からなる。とくに $l=1$ のとき自己同型写像群は位数が r の約数の巡回群である。"

参考文献

1）桜岡 充：Noether等式を基礎とするHilbert基底定理の導出，日本歯科大学紀要（一般教育系）28，24—29，2000.

2）桜岡 充：円周等分多項式の有理数体上での規約性，日本歯科大学紀要（一般教育系）28，9－14，1999.

3）永田雅宣：可換体論，裳華房，東京，1967.

4）O. Zariski and P. Samuel：Commutative algebra Ⅰ, Ⅱ, van Nostrand, New York, Ⅰ：1958, Ⅱ：1960.

5）M. Nagata：Local rings, John Wiley, New York, 1962.

6）H. Saito：Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lectures in Mathematics, Kyoto Univ., 1975.

7) V. W. Guillemin : Infinite dimensional primitive Lie algebras, J. Diff. Geom. 4, 257—282, 1970.

8) 松村英之：集合論入門，朝倉書店，東京，1966.

9) 永田雅宣：可換環論，紀伊国屋書店，東京，1992.